

Problème :**Préambule**

Dans ce problème n est un entier naturel non nul, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à éléments dans $\mathbb{C}$ corps des complexes.

$\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}$ sont identifiés de façon habituelle. I_n désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

M étant une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et φ un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n , on note respectivement $\text{Sp}(M)$ et $\text{Sp}(\varphi)$ les ensembles de valeurs propres de M et φ , et $E_\lambda(M)$ (resp. $E_\lambda(\varphi)$) le sous-espace propre associé à une valeur propre λ de M (resp. φ). Enfin on désigne par f_M l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ qui admet pour matrice M dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$, les vecteurs de $\mathbb{C}^n$ sont identifiés aux matrices colonnes de leurs coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Partie I

- Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$.
 - Soit λ une valeur propre de A , démontrer que : $f_B(E_\lambda(A))$ est inclus dans $E_\lambda(A)$.
 - Démontrer qu'il existe un vecteur non nul de $\mathbb{C}^3$ qui est vecteur propre de f_A et f_B .
 - Démontrer que si A a trois valeurs propres distinctes alors f_A et f_B se diagonalisent dans la même base de $\mathbb{C}^3$. Cette propriété est-elle vraie pour toute matrice A diagonalisable de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?
- On suppose, dans cette question, que A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$, quelconques. On considère l'équation :

$$AM = MB \quad (1)$$

où M est une matrice inconnue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On appelle E l'ensemble des solutions de (1).

On définit de plus deux applications φ et ψ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \varphi(M) = AM \quad \text{et} \quad \psi(M) = MB.$$

Puis $u(M) = \varphi(M) - \psi(M)$ définit une application u .

- Démontrer que φ , ψ et u sont des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comparer $\varphi \circ \psi$ et $\psi \circ \varphi$, $\text{Sp}(A)$ et $\text{Sp}(\varphi)$, $\text{Sp}(B)$ et $\text{Sp}(\psi)$.
- Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et $X \neq 0$, $X \in E_\lambda(A)$, $\mu \in \text{Sp}(B)$ et $Y \neq 0$, $Y \in E_\mu(B)$.
Démontrer que la matrice $X^t Y$ est un vecteur propre de u .
- Soit $\beta \in \text{Sp}(u)$ et $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.
 - Montrer que pour tout entier naturel k , $A^k Y = Y(\beta I_n + B)^k$.
 - En déduire que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)Y = Y P(\beta I_n + B)$.
 - On suppose que le polynôme caractéristique χ_A s'écrit

$$\chi_A = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (X - \lambda)^{\alpha_\lambda}.$$

En déduire qu'il existe $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et $\mu \in \text{Sp}(B)$ telles que $\beta = \lambda - \mu$.

- Démontrer l'équivalence : $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset \Leftrightarrow u$ bijective.

(e) Dans cette question on prend $n = 3$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- i. Déterminer $\text{Sp}(A)$, $\text{Sp}(B)$ et $\text{Sp}(u)$.
- ii. Déterminer E . E contient-il une matrice inversible ?
- iii. Résoudre l'équation :

$$AM = MB + 3M \quad (2)$$

M inconnue.

- iv. En déduire que u est diagonalisable.

3. On suppose que A et B diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on désigne par $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ des bases respectives de vecteurs propres de A et tB . En considérant la famille $(X_i {}^tY_j)_{1 \leq i, j \leq n}$, montrer que u est diagonalisable.
4. Déterminer le nombre de des solutions de l'équation matricielle $M^2 = A$ où A est définie en 2. e), M matrice inconnue.

Partie II

On se propose de résoudre une équation matricielle. On donne

$$A = \begin{pmatrix} 12 - 2i & -6 - 2i & 6 + 2i \\ -6 - 2i & 3 - 5i & -3 - i \\ 6 + 2i & -3 - i & 3 - 5i \end{pmatrix}$$

et l'équation

$$M^3 = A \quad (3)$$

où M est une matrice inconnue.

1. Déterminer $\text{Sp}(A)$ et les vecteurs propres de A .
2. Soit $P = \begin{pmatrix} b & c & 2 \\ a + b & c + d & -1 \\ a - b & d - c & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une relation entre les paramètres complexes a, b, c, d pour que P soit inversible.
Dans ce cas calculer $P^{-1}AP$.
3. Démontrer que l'on peut exprimer les matrices M diagonalisables vérifiant (3) à l'aide d'une matrice P inversible, de P^{-1} et de j (j racine cubique non réelle de 1).
4. On suppose qu'il existe M non diagonalisable vérifiant (3).
(a) Démontrer que M est semblable à une matrice du type

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et h sont des complexes. Préciser h .

- (b) On pose $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Étudier $\text{Sp}(B)$, calculer B^3 , établir que :

$$(B - wI_2)(B - wjI_2)(B - wj^2I_2) = 0,$$

où w est un nombre complexe que l'on précisera.

- (c) En étudiant le rang de $(B - wI_2)$, conclure quant à l'hypothèse envisagée dans cette question. Conclure quant aux solutions de (3).

FIN